第 3 章　刚体力学

一　求转动惯量

1. 用定义求转动惯量

质点离散分布	质点连续分布
$J=\sum_i m_i r_i^2$	$J=\int r^2\mathrm{d}m$

m_i：质点 i 的质量

r_i：质点 i 到转轴的距离

$\mathrm{d}m$：质量微元

r：质量微元到转轴的距离

转动惯量的定义求法

· 根据所求的是线、面还是体，用位置坐标表示出 ρ，再用对应的微元 $\mathrm{d}x$ / $\mathrm{d}S$ / $\mathrm{d}V$ 表示 $\mathrm{d}m$

· 再进行对应的积分（线积分/二重积分/三重积分）

2. 用定理求转动惯量

平行轴定理	垂直轴定理
$\boxed{J=J_C+mh^2}$	$\boxed{J_z=J_x+J_y}$

J：任一转轴的转动惯量

J_C：通过质心的平行轴的转动惯量

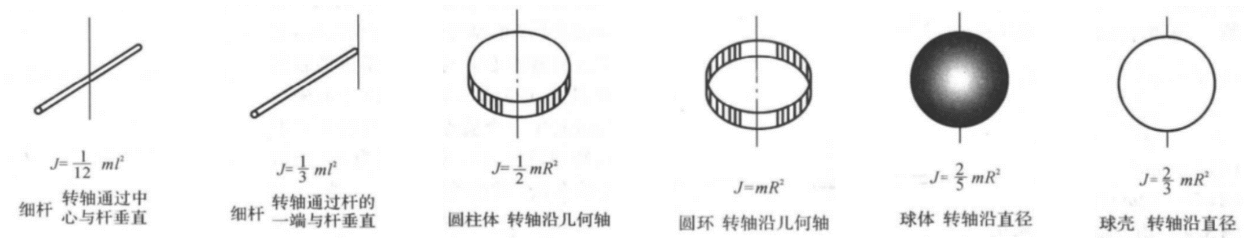
m：刚体质量　h：两轴间距离

条件：刚体为薄板，且在 xy 平面内

J_x、J_y、J_z：刚体对 x、y、z 轴的转轴

3. 常用转动惯量（自己推导一遍，记得更牢）

常用转动惯量



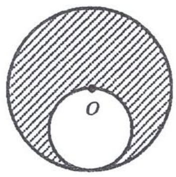
$\boxed{J=\frac{1}{12}ml^2}$　$\boxed{J=\frac{1}{3}ml^2}$　$\boxed{J=\frac{1}{2}mR^2}$　$\boxed{J=mR^2}$　$\boxed{J=\frac{2}{5}mR^2}$　$\boxed{J=\frac{2}{3}mR^2}$

4. 回转半径 R_G

回转半径

$$\boxed{R_G=\sqrt{\frac{J}{m}}}$$

例 1　（11–12，3）圆心位于 o 点，半径 R 、质量 $4m$ 的匀质圆板，内切地割去半径为 $R/2$ 的小圆板后，剩余的板块如图所示。过 o 点设置垂直于板面的转轴，则相对该转轴的转动惯量 $J=$ ________。



解　根据常用结论，完整的大圆板的转动惯量为 $J_0=\frac{1}{2}\cdot 4m\cdot R^2=2mR^2$

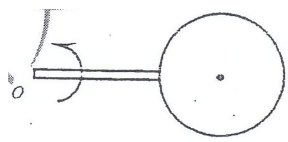
被割去的小圆板的质量为 $\frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2}\cdot 4m=\frac{1}{4}\cdot 4m=m$

若转轴在质心（圆心）上，则转动惯量 $J_C=\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{1}{8}mR^2$

则由平行轴定理，小圆板对 o 的转动惯量 $J'=J_C+mh^2=\frac{1}{8}mR^2+m\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{3}{8}mR^2$

因此总的转动惯量 $J=J_0-J'=\boxed{\frac{13}{8}mR^2}$

例 2　（04–05）如图所示，质量为 m ，半径为 R 的圆盘与质量为 m 、长为 $2R$ 的均匀细杆一端装在一起，杆的延长线通过圆心。则此组合刚体对通过杆的另一端并与纸面垂直的轴的转动惯量为____________。

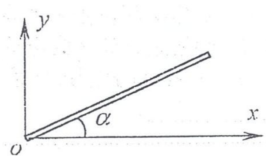


解　将组合体拆分为杆和圆盘，则根据常用结论，杆的转动惯量为 $\frac{1}{3}m(2R)^2=\frac{4}{3}mR^2$

根据平行轴定理，圆盘的转动惯量 $\frac{1}{2}mR^2+m(3R)^2=\frac{19}{2}mR^2$

因此总的转动惯量为 $\frac{4}{3}mR^2+\frac{19}{2}mR^2=\boxed{10\frac{5}{6}mR^2}$

例 3　（09–10）如图，质量为 m 、长度为 l 的均匀细杆在 xy 平面内，与 x 轴夹角为 α，其一端在原点 o 。则此杆对 x 轴的转动惯量为____________。



解　距 O 点 L 处长 $\mathrm{d}L$ 的微元对 x 轴的转动惯量为

$$y^2\mathrm{d}m=(L\sin\alpha)^2\rho\mathrm{d}L=(L\sin\alpha)^2\frac{m}{l}\mathrm{d}L$$

因此积分 $J=\frac{m}{l}\sin^2\alpha\int_0^l L^2\mathrm{d}L=\boxed{\frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha}$

例 4　（08–09）如图所示，细杆长为 l ，质量线密度为 $\rho=kx$ ，式中的 k 为正常量。则此杆对通过 o 点并与杆垂直的轴的转动惯量为_________。

解　本题虽然模型是细杆，但其密度不均，不能直接用常用结论，需要用微元法求解

距转轴 x 处长 $\mathrm{d}x$ 的微元的转动惯量为 $x^2\mathrm{d}m=x^2\rho\mathrm{d}x=kx^3\mathrm{d}x$

因此积分得到 $J=\int_0^l kx^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kl^4$

二　转动定律：定滑轮问题

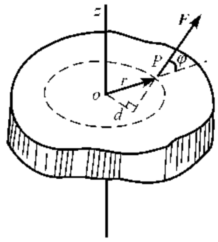
1. 定轴转动的描述

刚体定轴转动时，每个质点在转动平面（与转轴垂直的平面）内作圆周运动，因此可用角量描述

角坐标	角速度	角加速度
θ	ω	β

2. 力矩（矢量）

· 作用在刚体上某点 P 的力与该点至转轴的垂直距离 d（力臂）的乘积



力矩
$\boxed{\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}} \rightarrow \boxed{M=rF\sin\varphi}$

· $\boldsymbol{F}$ 中只有与 $\boldsymbol{r}$ 垂直的分量 $F\sin\varphi$ 才能产生力矩，使刚体发生转动

· 如果有几个力同时作用，则合力矩 $\boldsymbol{M}=\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

3. 转动定律

· 刚体定轴转动时，角加速度与合外力矩 $\boldsymbol{M}$ 成正比，与转动惯量 J 成反比

转动定律
$\boxed{\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\beta}}$

定滑轮问题

解法：① 受力分析：确定滑轮、物体所受的力（或力矩）

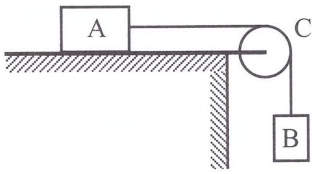
通常滑轮受一个或两个**拉力** T_i，形成拉力矩，物体受拉力（和重力等其它力）

② 对每个受力分析的物体列方程：

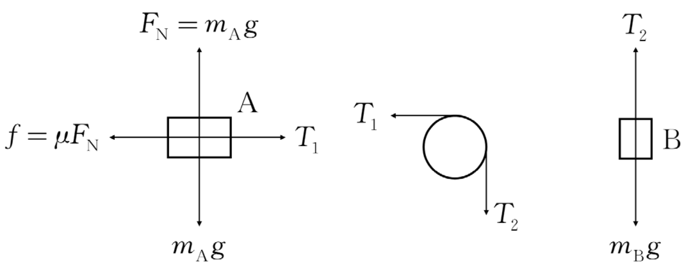
· 定滑轮列转动方程，物体列牛二方程，物体间运动关联列一条方程

③ 联立列出来的方程求解

例 1　（18–19）如图所示，滑块 A、重物 B 和滑轮 C 的质量分别为 m_A、m_B 和 m_C，滑轮半径为 R、质量均匀分布的圆盘，滑块 A 与桌面之间的动摩擦系数为 μ，C 与轴承之间无摩擦，绳的质量可不计，绳与滑轮之间无相对滑动，求滑块 A 的加速度的大小。



解　本题中涉及 3 个物体，对它们进行受力分析：



因此每个物体都能列一条方程：

$$T_1-\mu m_A g=m_A a_A \text{ ①}$$

$$RT_2-RT_1=J\beta \text{ （} J=\frac{1}{2}m_C R^2 \text{ ）②}$$

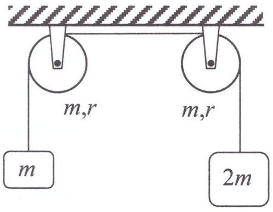
$$m_B g-T_2=m_B a_B \text{ ③}$$

根据运动的关联性，有

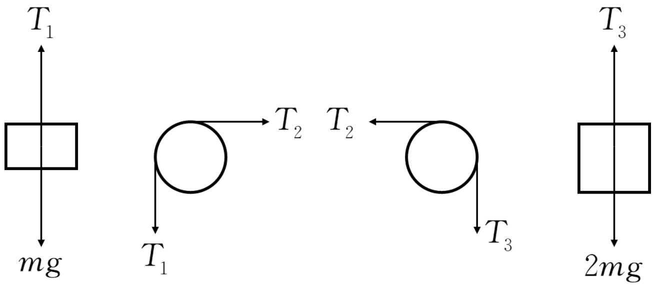
$$a_A=a_B=\beta R \quad \text{④}$$

联立，解得 $a_A=\dfrac{2(m_B-\mu m_A)g}{2m_A+2m_B+m_C}$

例 2 （17–18）一轻绳跨过两个质量均为 m 、半径均为 r 的均匀圆盘状定滑轮，绳的两端分别挂着质量为 m 和 $2m$ 的重物，如图所示，绳与滑轮间无相对滑动，滑轮轴光滑。将由两个定滑轮以及质量为 m 和 $2m$ 的重物组成的系统从静止开始释放，求两滑轮之间绳内的张力。



解 本题中涉及 4 个物体，对它们进行受力分析：



因此每个物体都能列一条式子：

① $T_1-mg=ma_1$

② $rT_2-rT_1=J\beta_2$ （$J=\dfrac{1}{2}mr^2$ ）

③ $rT_3-rT_2=J\beta_3$

④ $2mg-T_3=2ma_4$

根据运动的关联性，有

$$a_1=r\beta_2=r\beta_3=a_4$$

联立，解得所求的 $T_2=\dfrac{11}{8}mg$

三　定轴转动中的动能与角动量

1. 刚体定轴转动的动能定理

① 力矩做功

· 刚体定轴转动时，力矩 $\boldsymbol{M}$ 与元角位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 乘积的积分

力矩做功 微分式	力矩做功 积分式
$\mathrm{d}A=\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$	$A=\int_{\theta_0}^{\theta}M\,\mathrm{d}\theta$

② 转动动能的表示

定轴转动动能

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}J\omega^2$$

③ 动能定理

定轴转动的动能定理

$$\boxed{A=\int_{\theta_0}^{\theta}\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2}$$

例 1　（17—18）如图所示，均匀细杆质量为 m 、长为 l ，上端连接一个质量为 m 的小球，可绕通过下端并与杆垂直的水平轴转动。设杆最初静止于竖直位置，受微小干扰而往下转动。求转到水平位置时：（1）杆的角速度；（2）杆的角加速度；（3）轴对杆的作用力

解　本题只涉及初始和终末两种状态，因此适合用动能定理

（1）求转动惯量

$$J=\frac{1}{3}ml^2+ml^2=\frac{4}{3}ml^2$$

分析外力做功：重力对小球和杆做功

可以分别计算：小球从高 l 处移动到地面，因此做功 mgl

杆的质心从 $\frac{l}{2}$ 处移动到地面，因此做功 $\frac{1}{2}mgl$

也可以将两者视为一个物体，其质心位于 $\dfrac{\frac{l}{2}\cdot m+l\cdot m}{2m}=\frac{3}{4}l$ 处，重 $2mg$

因此一共做功 $\frac{3}{2}mgl$ ，列动能定理求解：

$$A=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

代入 $A=\frac{3}{2}mgl$ ， $J=\frac{4}{3}ml^2$ ， $\omega_0=0$ ，解得 $\boxed{\omega=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}}$

（2）转动到水平位置时，只有重力产生力矩，由转动定律：

$$mgl+\frac{l}{2}mg=J\beta$$

解得 $\boxed{\beta=\frac{9g}{8l}}$

（3）轴对杆提供了约束力，可以想象，如果没有这个力，杆就飞出去了

约束力包括竖直的约束力 N_y，与重力叠加提供杆上各点的切向加速度

以及水平的约束力 N_x，提供杆上各点的向心加速度

这些点可以用质心等效，因此可以列两条方程：

$$\begin{cases} N_x = 2m \cdot \omega^2 \cdot \dfrac{3}{4} l \\ 2mg - N_y = 2m \cdot \dfrac{3}{4} l \cdot \beta \end{cases}$$

解得 $N_x = \dfrac{27}{8} mg$（方向水平向左），$N_y = \dfrac{5}{16} mg$（方向竖直向上）

2. 刚体定轴转动角动量相关

① 刚体对轴的角动量

刚体对轴的角动量
$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$

② 定轴转动角动量定理

定轴转动角动量定理 微分式	定轴转动角动量定理 积分式
$\boldsymbol{M} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t}$	$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M} \mathrm{d}t = J\boldsymbol{\omega} - J_0\boldsymbol{\omega}_0$

③ 定轴转动角动量守恒定律

定轴转动角动量守恒定律
如果系统所受合外力矩 M 为零，则系统角动量 $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$ 为守恒量

杆碰撞问题

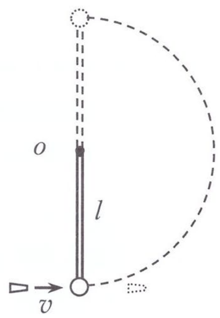
问题特征：由两个过程“杆与某物体碰撞”“杆发生转动（只关注始末态）”组成，顺序不一定

解法：① 确定碰撞前后杆的角速度，物体的速度，列**角动量守恒式**

② 确定杆转动始末态的角速度以及过程中所作的功（通常是重力），列**动能定理**

③ 两条式子共同含有的物理量是杆转动的初始（或末）角速度，联立求解

例 2 （19–20）有一质量为 M，长为 l 的均匀细棒，其一端固定一质量也为 M 的小球，另一端可绕垂直于细棒的水平轴 o 自由转动，组成一球摆，静止在竖直位置。现有一质量为 m 的子弹，以水平速度 v 射向小球，子弹穿过小球后速率减为 $v/2$，方向不变，如图所示。如果要使球摆能在铅直平面内完成一个完全的圆周运动，则子弹射入速度 v 的大小至少为多大?



解 本题为杆碰撞问题，首先**算出球摆的转动惯量** $J = \dfrac{1}{3} Ml^2 + Ml^2 = \dfrac{4}{3} Ml^2$

由**角动量守恒**，算出球摆的初速度

$$mv \cdot l + 0 = m\frac{v}{2} \cdot l + J\omega_0$$

解得

$$\omega_0=\frac{3mv}{8Ml}$$

球摆能完成一个圆周运动，意味着球摆到达最高点（转过 180°）时速度大于等于 0

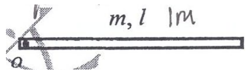
→ 这一过程中重力 & 重力矩作负功，由**机械能守恒**：

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2=Mg\cdot 2l+Mgl+\frac{1}{2}J\omega^2$$ （可以由质心的重力势能变化求出做功）

由 $\omega\geq 0$，解得

$$\boxed{v\geq\frac{4M}{m}\sqrt{2gl}}$$

例 3 （14—15 改编）一根放在水平粗糙桌面上的匀质棒，可绕通过其一端的竖直固定光滑轴 o 转动，棒的质量为 m，长度为 l。初始时棒静止。今有一水平运动的子弹垂直地射入棒的另一端，并留在棒中，如图所示。子弹的质量 m'，速率 v。试问：



（1）棒开始和子弹一起转动时角速度 ω 有多大?

（2）忽略子弹产生的摩擦，若棒与桌面的摩擦系数为 μ，棒能转过多大的角度 θ？

解 （1）本题为杆碰撞问题，首先**求出转动惯量** $J=\frac{1}{3}ml^2$

由题给条件 & **角动量守恒**：

$$m'v\cdot l=(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2)\omega$$

解得 $\omega=\dfrac{3m'}{m+3m'}\dfrac{v}{l}$

（2）首先计算摩擦力矩，由于棒上各点的摩擦力矩不同，需要运用微元法

对于距轴 x 处长 $\mathrm{d}x$ 的微元，其受到的摩擦力矩为

$$\mathrm{d}M_f=x\mathrm{d}f=x\mu g\mathrm{d}m=\frac{\mu mg}{l}x\mathrm{d}x$$

积分得到总的摩擦力矩

$$M_f=\int_0^l\frac{\mu mg}{l}x\mathrm{d}x=\frac{\mu mg}{2l}l^2=\frac{1}{2}\mu mgl$$ （本题也可以由质心等效得到）

由动能定理

$$M_f\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-0=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2+m'l^2)\omega^2$$

解得 $\theta=\dfrac{3m'^2}{m+3m'}\dfrac{v^2}{\mu mgl}$

运动状态变化问题

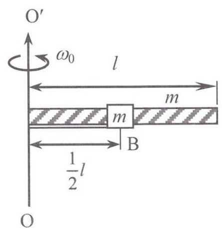
问题特征：系统由多个物体组成，不受外力矩作用发生状态变化

解法：① **不要关注变化的具体过程**，只要变化没有外力矩作用，就能用角动量守恒定律

② 确认每个物体变化前后的**位置**和**速度**（角速度）

③ 从题干中找到以上条件中的已知条件，代入，解出未知条件

例 4 （18–19）在一水平放置的质量为 m、长度为 l 的均匀细杆上，套着一质量也为 m 的套管 B（可看作质点），套管用细线拉住，它到竖直的光滑固定轴 OO' 的距离为 $l/2$，杆和套管所组成的系统以角速度 ω_0 绕 OO' 轴转动，如图所示。若在转动过程中细线被拉断，套管将沿着杆滑动。在套管滑动过程中，该系统转动的角速度 ω 与套管离轴的距离 x 的函数关系为



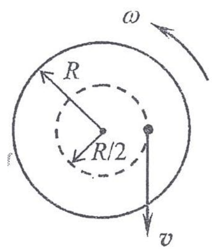
解 在细线拉断后，杆和套管组成的系统不再受外力矩作用，因此角动量守恒

系统变化前角动量：套管 $m\cdot\omega_0\dfrac{l}{2}\cdot\dfrac{l}{2}$，杆 $\dfrac{1}{3}ml^2\cdot\omega_0$；变化后：套管 $m\cdot\omega' x\cdot x$，杆 $\dfrac{1}{3}ml^2\cdot\omega'$

由角动量守恒定律：$m\cdot\omega\dfrac{l^2}{4}+\dfrac{1}{3}ml^2\cdot\omega=m\cdot\omega' x^2+\dfrac{1}{3}ml^2\cdot\omega'$

解得 $\omega'=\dfrac{\frac{7}{12}\omega_0}{\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}}=\dfrac{7l^2\omega_0}{4(3x^2+l^2)}$

例 5 （11–12）在半径为 R 的具有光滑竖直固定中心轴的水平圆盘上，有一人静止站立在距转轴为 $R/2$ 处，人的质量是圆盘质量的 1/10。开始时盘载人对地以角速度 ω_0 匀速转动，现在此人垂直圆盘半径相对于盘以速率 v 沿与盘转动相反方向作圆周运动，如图所示。已知圆盘对中心轴的转动惯量为 $MR^2/2$。求：（1）圆盘对地的角速度；（2）欲使圆盘对地静止，人沿着 $R/2$ 圆周相对圆盘的速度 v 的大小及方向。



解 圆盘和人组成的系统不受外力矩作用，因此角动量守恒，人的质量为 $M/10$

系统状态变化前，人的角动量 $\dfrac{M}{10}\cdot\omega_0\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{R}{2}$，圆盘角动量 $\dfrac{MR^2}{2}\cdot\omega_0$

系统状态变化后，人的角动量 $\dfrac{M}{10}\cdot(\omega-\dfrac{v}{R/2})\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{R}{2}$，圆盘角动量 $\dfrac{1}{2}MR^2\cdot\omega$

由角动量守恒定律：$\dfrac{M}{10}\cdot\omega_0\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{R}{2}+\dfrac{MR^2}{2}\cdot\omega_0=\dfrac{M}{10}\cdot(\omega-\dfrac{v}{R/2})\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{R}{2}+\dfrac{1}{2}MR^2\cdot\omega$

解得（1） $\omega=\omega_0+\dfrac{2v}{21R}$

（2）要使圆盘静止，只要使（1）的结果中 $\omega=0$ 即可，从而解得 $v=-\dfrac{21}{2}R\omega_0$

三　平面运动

1. 刚体平面运动的分解

· 平面运动可分解为随刚体内某点（基点）的**平动**和绕过该基点垂直于转动平面的轴的**转动**

① 基点选择：一般选择**质心或瞬时转动中心** → 会带来很大的方便

② 选择不同基点，平动速度、加速度不同；角速度、角加速度相同

2. 以刚体质心为基点

· 对于刚体的平面运动，以质心为基点时，有以下定律成立

质心运动定理	转动定律	动能可分解
$\boxed{\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_C}$	$\boxed{\boldsymbol{M}_C=J_C\boldsymbol{\beta}}$	$\boxed{E_k=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2}$

动滑轮问题

此类问题中的动滑轮在自身转动的同时也在平动，解题步骤与定滑轮问题相同，但要注意

其中，动滑轮要考虑作用在质心上的力（如重力），定滑轮则不用

② 列方程（同样与定滑轮问题类似）并求解

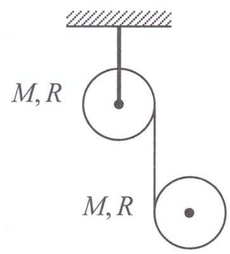
· 动滑轮要列 2 条方程：绕质心轴转动的方程 & 质心运动的方程

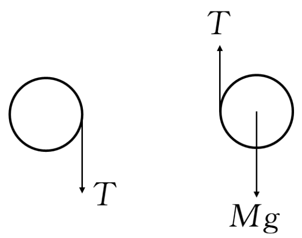
· 尤其需要注意定滑轮的 β、动滑轮的 β 和 a_C 存在关联

可以假设只有一个滑轮转动，依次分析每个转动如何影响 a_C

例 1　（19—20）一定滑轮的半径为 R，质量为 M，边缘绕有细线，细线的另一端绕在具有同样半径和质量的圆盘上，圆盘可以自由地松开缠绕的细线自由下落。假定细线始终保持竖直，试求：（1）定滑轮的角加速度；（2）圆盘质心的加速度；（3）圆盘的角加速度；（4）细线的张力。

解　① 受力分析：本题中涉及的物体有定滑轮和圆盘（动滑轮）：





② 列方程：定滑轮：$R\cdot T=\frac{1}{2}MR^2\beta$（定轴转动）

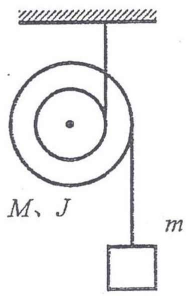
圆盘：$Mg-T=Ma_C$（质心平动）　：

$R\cdot T=\frac{1}{2}MR^2\beta'$（绕质心转动）

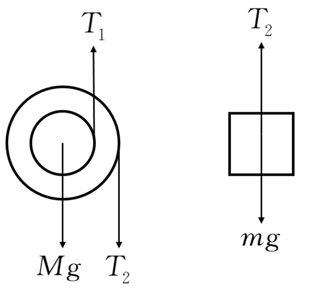
运动关系：圆盘**质心运动与绳长变化同步** → $a_c=\beta R+\beta' R$

联立以上四条式子，解得：（1）（3）$\beta=\beta'=\frac{2g}{5R}$　（2）$a_c=\frac{4T}{M}$　（4）$T=\frac{1}{5}Mg$

例 2　（06–07）半径为 $r_1 = 0.04\text{m}$ 和 $r_2 = 0.10\text{m}$ 的两个短圆柱同心地装在一起，总质量为 $M = 8.0\text{kg}$，绕对称轴地转动惯量为 $J = 0.03\text{kg}\cdot\text{m}^2$。小圆柱上绕有轻绳，绳的上端固定在天花板上。大圆柱上也绕有轻绳，绳的下端挂一质量为 $m = 6.0\text{kg}$ 的物体，求圆柱体的角加速度、质心加速度、物体的加速度和绳中的张力。



解　① 受力分析：本题中涉及的物体有动滑轮和物体



② 列式：

物体：$mg - T_2 = ma$

动滑轮：$Mg + T_2 - T_1 = Ma_C$（质心向下平动）　$r_1T_1 - r_2T_2 = J\beta$（绕质心逆时针转动）

运动关系：$r_1\beta = a_C$　　$a = a_C - r_2\beta$

③ 联立，解得

$\beta = 6.09\text{rad/s}^2$　$a_C = 0.244\text{m/s}^2$　$a = 0.365\text{m/s}^2$　$T_1 = 137\text{N}$　$T_2 = 56.6\text{N}$

3.瞬时转动中心为基点

① 瞬时转动中心

· 任一时刻，在过质心、垂直于 $\boldsymbol{v}_c$ 的直线上，必定存在一点 P，其速度 $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{PC} = 0$

该点 P 叫做刚体的**瞬时转动中心**；过 P 点、并垂直于转动平面的轴叫**瞬时轴**

· 瞬时转动中心或瞬时转动轴的位置会随着运动改变。若位置不变，则是简单的定轴转动

② 绕瞬时轴的转动

· 选择瞬时转动中心为基点时，没有平动、只有转动

转动定律	转动动能
$\boxed{M_P = J_P\beta}$	$\boxed{E_k = \frac{1}{2}J_P\omega^2}$

4.纯滚动（物体与地面间只有滚动，没有相对滑动）

① 圆柱体或球体纯滚动时的特点

· 质心平动与转动之间存在恒等关系

质心平动速度	质心平动加速度（*）
$\boxed{v_C = R\omega}$	$\boxed{a_C = R\beta}$

· 瞬时转动中心位于与地面的接触点

纯滚动问题

· 此类问题的解法与定滑轮、动滑轮问题都是相同的，要掌握的是

① **刚体转动方向判断**

· 假设没有摩擦力，剩余的力对**瞬时轴**的力矩 ＝ 刚体的转动方向

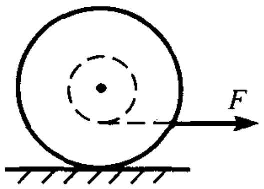
② **摩擦力方向**

· 假设没有滚动，只有相对滑动，接触点切向加速度的反方向即为摩擦力的方向

③ **纯滚动条件**

· 摩擦系数应当足够大以提供足够的摩擦力，从而提供足够的力矩满足纯滚动的特点（* 式）

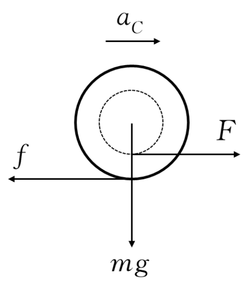
例 3 （05–06）绕线绳的质量为 4.0kg，绕对称轴的转动惯量为 $J=9.0\times10^{-2}\mathrm{kg\cdot m^2}$，大圆半径为 $R=0.20\mathrm{m}$，小圆半径为 $r=0.10\mathrm{m}$。用 $F=25\mathrm{N}$ 的水平力拉线的一端，使绕线轮在水平地面上作纯滚动。求：（1）绕线轮的角加速度和质心加速度；（2）地面对绕线轮的摩擦力；（3）摩擦系数至少多大才无相对滑动。



解 ① 受力分析：

除摩擦力外的力对瞬时轴力矩方向纸面向内，因此滚动方向为顺时针

假设滑动，则接触点向右运动，因此 f 向左



② 列式：

· 质心平动：$F-f=ma_C$

· 绕质心转动：$fR-Fr=J\beta$

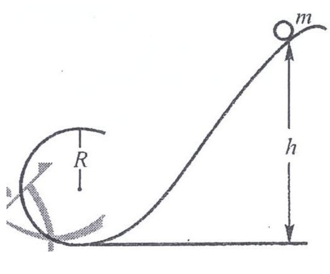
· 运动关系（纯滚动）：$a_C=\beta R$

③ 求解

联立，解得（1）$\beta=\dfrac{F(R-r)}{mR^2+J}=10\mathrm{rad/s^2}$ $a_C=2.0\mathrm{m/s^2}$ （2）$f=\dfrac{J\beta+Fr}{R}=17\mathrm{N}$

（3）摩擦系数为 μ 时，提供的摩擦力 $f'=\mu mg$ 应不小于本题中的 f，因此 $\mu\geq\dfrac{f}{mg}$

例 4 （10–11）质量为 m，半径为 r 的均匀小球从高为 h 的斜坡上向下作纯滚动，问 h 必须满足什么条件，小球才能翻过如图所示半径为 R 的圆形轨道顶部而不脱轨？（设 $r\ll R$）



解 小球到达最高点时，重力做功 $mg(h-2R)$，由动能定理

$$mg(h-2R)=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2 \quad ①$$

对顶部的小球作受力分析，其受重力和支持力，若要不脱轨，支持力应不小于 0：

$$N = m\frac{v_C^2}{R} - mg \geq 0 \ \rightarrow \ v_C^2 \geq gR \ ②$$

由纯滚动，角速度和质心速度间应存在关系

$$v_C = \omega r \ ③$$

联立以上三条方程，再加上小球的转动惯量 $J_C = \frac{2}{5}mr^2$，解得 $\boxed{h \geq \frac{27}{10}R}$

五　陀螺仪的定点转动

1. 陀螺仪的定点转动

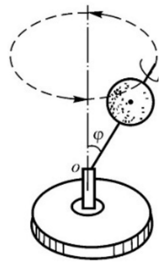
① 基本概念

- **陀螺仪**：具有轴对称性、绕对称轴的转动惯量 J 很大的刚体
- **旋进**：高速自转的陀螺仪倾斜放在定点上时，陀螺自转轴绕竖直方向沿圆锥面缓慢转动

② 相关计算

- **旋进角速度**：自转轴旋转的角速度

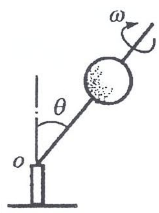
自转角动量	重力矩	旋进角速度
$\boxed{\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}}$	$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g}}$	$\boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\varphi} = \frac{mgr}{J\omega}}$



- 旋进方向判定

旋进方向判断
$\boldsymbol{L}$ 方向由旋转中心指向陀螺时，旋进方向与 $\boldsymbol{M}$ 同向
$\boldsymbol{L}$ 方向由陀螺指向旋转中心时，旋进方向与 $\boldsymbol{M}$ 反向

例　（12–13）如图所示，陀螺质量 $m = 2\text{kg}$，绕自转轴的转动惯量 $J = 0.02\text{kg}\cdot\text{m}^2$，陀螺绕自转轴以角速度 $\omega = 100\text{rad/s}$ 转动，陀螺下端被放在支点 o 上，自转轴与竖直轴之间的夹角为 $\theta = 30°$，质心到支点的距离为 $r = 0.10\text{m}$。求：



（1）自转角动量；

（2）陀螺仪所受对支点的外力矩；

（3）旋进角速度，并判断旋进方向（俯视）。

解　（1）自转角动量 $L = J\omega = 2.0\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$，方向沿自转轴向下

（2）外力矩 $M = mgr\sin\theta = 0.98\text{N}\cdot\text{m}$，方向沿所在点沿旋进路线切线，俯视逆时针

（3）$\Omega = \frac{mgr}{J\omega} = 0.98\text{rad/s}$，由于 $\boldsymbol{L}$ 沿自转轴向下，因此旋进方向与 $\boldsymbol{M}$ 相反，为**俯视顺时针**

六　流体力学基础

1. 流体力学基本概念

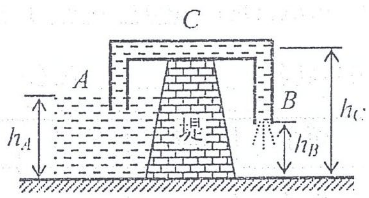
· **理想流体**：绝对不可压缩、完全无粘滞性的流体

· **定常流动**：流体所经管道内每一点的流速都不随时间变化。（不同点流速可能不一样）

2. 基本方程

连续性方程	伯努利方程
$\boxed{\text{体积流量}\quad V=S\cdot v\quad\text{处处相等}}$	$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=\text{constant}}$
· S：流动截面积 v：流速	· p：流体在该处的压力 h：流体在该处的高度

例　（08–09）在我国河南、山东一带的黄河两岸，水面常高于地面，为引水灌溉，常采用虹吸管装置，如图所示。一根截面均匀的弯管 ACB，充满水后，其一端插入河水中，另一端 B 开放。设 A、B、C 三处的高度分别为 h_A、h_B、h_C，大气压为 P_0。则水由 B 端流出的速度为____________。



解　由于管子的截面均匀，由连续性方程，水的流速处处相同，设为 v，

但 A 处为河面，可认为水流速为 0，压力 p_0；B 处压力 p_0，则由伯努利方程：

$$p_0+\rho gh_A+0=p_0+\rho gh_B+\frac{1}{2}\rho v^2$$

解得 $v=\sqrt{2g(h_A-h_B)}$